Polynômes de Chebyshev

Marco Sutti

On a vu en cours que les polynômes de Chebyshev $T_k(x)$ sont définis pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ par

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)), \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1].$$

Les T_k sont en fait des polynômes qui satisfont la relation de récurrence suivante :

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \geq 1.$$

avec $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$. Les cinq premiers polynômes de Chebyshev sont :

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad T_2(x) = 2x^2 - 1, \qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \qquad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

La Figure 1 montre les cinq premiers polynômes de Chebyshev sur l'intervalle $[-1, 1]$ (à gauche) et sur l'intervalle $[-1.5, 1.5]$ (à droite). On remarque que dans l'intervalle $[-1, 1]$ les polynômes de Chebyshev restent bornés par 1 et -1, mais en dehors de cet intervalle ils exhibent une croissance très vite.

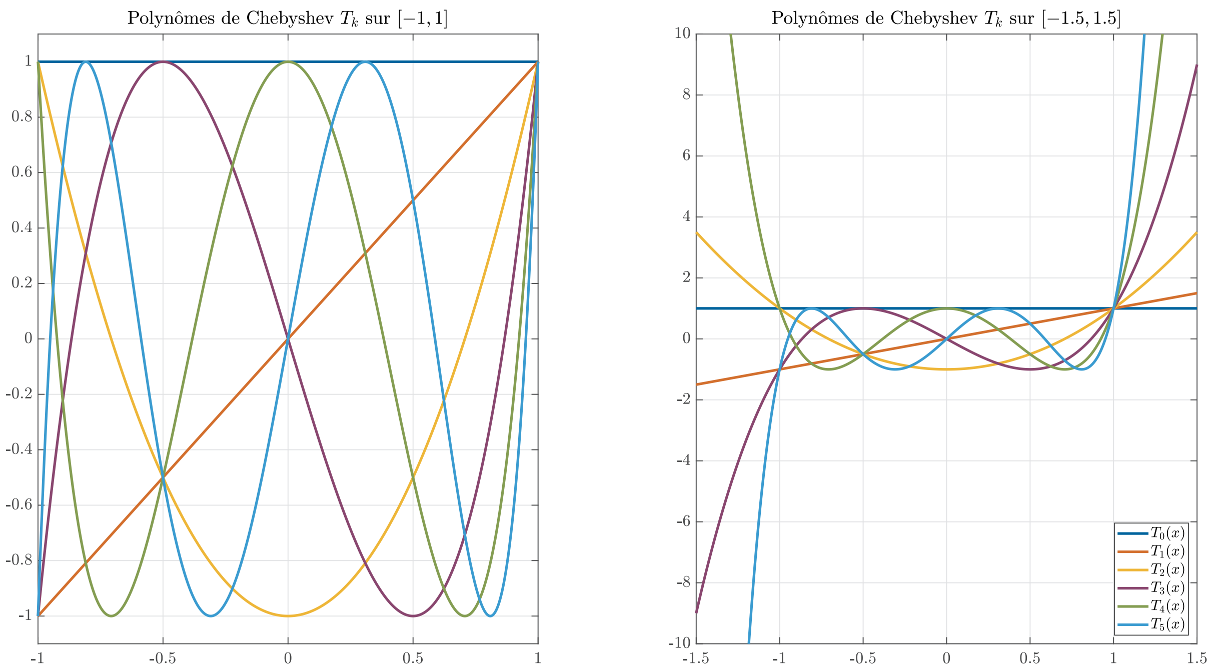

FIGURE 1: Les cinq premiers polynômes de Chebyshev.

Les polynômes de Chebyshev forment une base de $\mathbb{P}_n$. On va montrer que la famille de polynômes $\{T_0, T_1, \ldots, T_n\}$ est une base pour $\mathbb{P}_n$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Supposons de savoir déjà que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ est une base (dite la base canonique) de $\mathbb{P}_n$ (voir cours d'algèbre linéaire). On construit une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dont les coefficients correspondent à ceux des polynômes de Chebyshev dans leur décomposition sur la base canonique. On note m_{ij} les coefficients de la matrice M. Pour $1 \leq i \leq n$, le polynôme T_{i-1} est exactement de degré $i-1$, donc $m_{ij} = 0$ pour tout $j > i$. Notamment, les coefficient sur la diagonale principale valent $m_{ii} = 2^{i-1}$. M est donc une matrice triangulaire inférieure ayant cette forme :

$$\begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & 2 & & & & & \\ 0 & -3 & 0 & 4 & & & & \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 8 & & & \\ 0 & 5 & 0 & -20 & 0 & 16 & & \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \ddots & \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & 2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

Comme M est une matrice triangulaire inférieure, son déterminant est donné par le produit des coefficients sur sa diagonale principale. Le déterminant étant non nul, la matrice M est inversible. En effet M est une matrice de changement de base, ou matrice de passage (appelée P en cours d'algèbre linéaire). Puisque $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ est une base de $\mathbb{P}_n$, alors $\{T_0, T_1, \ldots, T_n\}$ l'est aussi.